51 達澤爾定理…不可思議的黃金分割現象

一個團體，例如學校的數學科、一個班級、全校等，遇到有重要事項要議決時，常常採用投票的方式來決定該如何實行。而這種投票方式，經常以超過半數讚成或者三分之二以上讚成為通過與否的重要分水嶺。超過半數的規定很容易理解，但三分之二以上的規定不知從何而來，為什麼不是五分之三以上呢？

事實上，對於只有不是讚成就是反對的投票模式，心理學上有一則相當有趣的「黃金分割現象」。這現象是說，若投反對票有 n 人，投讚成票有 p 人，則讚成票所佔的比例，即分數

$$\frac{p}{p+n}$$

會很接近黃金比例 $\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。我們若相信「黃金分割現象」的話，應該將「三分之二以上」的規定改成「超過 0.618」才是。

另一個有趣的黃金分割現象是分割繩子的遊戲：如果將一條繩子隨意分割成兩段，令較長與較短段的長度分別為 M 與 m，那麼較長段所佔的比例，即分數

$$\frac{M}{M+m}$$

也會很接近黃金比例 $\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。

綜合上述兩個黃金分割現象，不難發現他們都在談論長相為

$$\frac{a}{a+b}$$

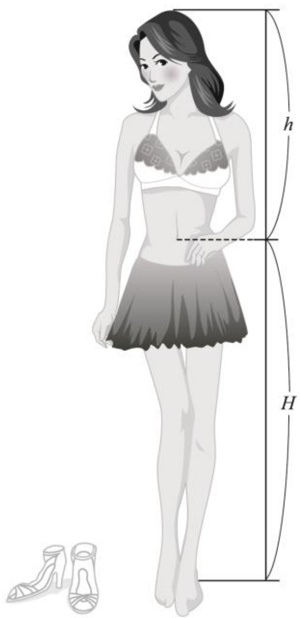
這類的分數，而且它們都會很靠近黃金比例 0.618。達澤爾發現這類分數比分數 $\dfrac{b}{a}$ 更靠近黃金比例 0.618：

設黃金比例 $\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，達澤爾定理是說：對任何正整數 a 與 b，分數 $\dfrac{b}{a}$ 與黃金比例 ϕ 的

差大於或等於分數 $\frac{a}{a+b}$ *與黃金比例* ϕ *的差，即*

$$\left|\frac{a}{a+b}-\phi\right| \le \left|\frac{b}{a}-\phi\right|.$$

在證明達澤爾定理之前，再談論一些相關的趣事：



肚臍將身體分成上半身與下半身，其中上半身比較短，下半身比較長。令下半身長度為 H ，而上半身長度為 h ，當下半身與身高的比例越接近黃金比例 ϕ ，即

$$\frac{H}{H+h}=\phi\approx 0.618$$

時，身材越完美。也就是說，將人類的身材以肚臍做分割，也會有黃金分割現象。各位愛美的女性，不妨算一下自己的比例。當這個比例未達 0.618 時，也不必灰心氣餒，穿一雙高跟鞋可以馬上讓這個人體美學的比例提高。若高跟鞋的高度適當的話，這個比例更可以提高到很接近 0.618。芭蕾舞者跳舞時喜歡墊腳尖，也是提高比例的方式之一。倒是有一件事情一直覺得很奇怪，東南亞的某些民族以銅環掛頸，愈長表示愈美。這些長頸族婦女的頸部特別長，感覺起來上半身比較長。事實上，這是一種錯覺，根據研究，長頸族婦女的脖子與一般人相當，只是肩胛骨被銅環重量壓低，才顯得脖子長。

現在讓我們來證明達澤爾定理：令 $\alpha=\frac{a}{a+b}$ ，因為 $\frac{1}{\alpha}=1+\frac{b}{a}$ ，即

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\alpha}-1,$$

所以可以將達澤爾定理改寫成證明：對任何介於 0 與 1 之間的實數 α ，不等式

$$|\,\alpha-\phi\,| \le \left|\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)-\phi\right|$$

恆成立。在證明之前，先寫出黃金比例 ϕ 所滿足的二次方程式

$$\phi^2 = 1-\phi.$$

(1) 當$\phi < \alpha < 1$時

$$\frac{1}{\alpha}-1 < \frac{1}{\phi}-1 = \frac{1-\phi}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi.$$

此時將不等式去絕對值並相減，得

$$\begin{aligned}\left(\phi-\frac{1}{\alpha}+1\right)-(\alpha-\phi) &= -\frac{1}{\alpha}\left(\alpha^2-(2\phi+1)\alpha+1\right)\\ &= -\frac{1}{\alpha}\left(\alpha^2-(2\phi+1)\alpha+\phi(\phi+1)\right)\\ &= -\frac{1}{\alpha}(\alpha-\phi)(\alpha-(\phi+1))\\ &> 0.\end{aligned}$$

(2) 當$0 < \alpha < \phi$時

$$\frac{1}{\alpha}-1 > \frac{1}{\phi}-1 = \frac{1-\phi}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi.$$

此時將不等式去絕對值並相減，得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}-1-\phi\right)-(\phi-\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha^2-(2\phi+1)\alpha+1\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha^2-(2\phi+1)\alpha+\phi(\phi+1)\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}(\alpha-\phi)(\alpha-(\phi+1))\\ &> 0.\end{aligned}$$

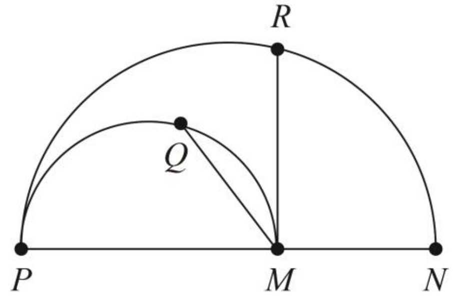
我們不妨做個實驗，請學生拿出直尺，畫一條 10 公分的線段，線段上不做任何記號，然後將直尺收起來，用筆將線段分割成兩段。

再拿出直尺量兩段的長度，令較長的一段長度為L，較短的一段長度為l。統計所有學生所得到的比例

$$\frac{L}{L+l}$$

之分佈情形。看看這些比例分佈是否有黃金分割現象。

最後，讓我們合唱一首黃金比例的天籟之音，這美妙音樂的創作者是印度數學家拉瑪奴姜：下圖中，兩半圓相切，$\overline{RM}$ 垂直 $\overline{PN}$，而且線段 $\overline{MN}$ 與 $\overline{MQ}$ 等長。數學家拉瑪奴姜說：「P,Q,R 三點共線的充分必要條件為 $\overline{MN}$ 與 $\overline{MP}$ 的比值是黃金比例 ϕ。」



【證明】在證明中，我們會用到 ϕ 所滿足的方程式

$$1=\phi^2+\phi.$$

(1) 設 $\overline{PM}=1,\overline{MN}=\phi$。因為 ΔPMQ 為直角三角形，又 $\overline{MQ}=\phi$，所以

$$\overline{PQ}=\sqrt{1-\phi^2}=\sqrt{\phi},$$

即

$$\tan\angle QPM=\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\phi}{\sqrt{\phi}}=\sqrt{\phi}.$$

又由 $\overline{RM}^2=\overline{PM}\times\overline{MN}$ 得

$$\overline{RM}=\sqrt{1\times\phi}=\sqrt{\phi},$$

即

$$\tan\angle RPM=\frac{\overline{RM}}{\overline{PM}}=\frac{\sqrt{\phi}}{1}=\sqrt{\phi}.$$

綜合得到 $\angle QPM=\angle RPM$，即 P,Q,R 三點共線。

(2) 設 P,Q,R 三點共線，並令 $\overline{PM}=1,\overline{MN}=x$。同 (1)的方法可以推得

$$\overline{QM}=x, \overline{RM}=\sqrt{x}, \overline{RN}=\sqrt{x+x^2}.$$

因為 $\sin\angle QPM=\sin\angle RPN$ ，所以

$$\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+x^2}}{1+x}\Rightarrow 1=x^2+x,$$

解得 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ （不合），即

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MP}}=x=\phi.$$